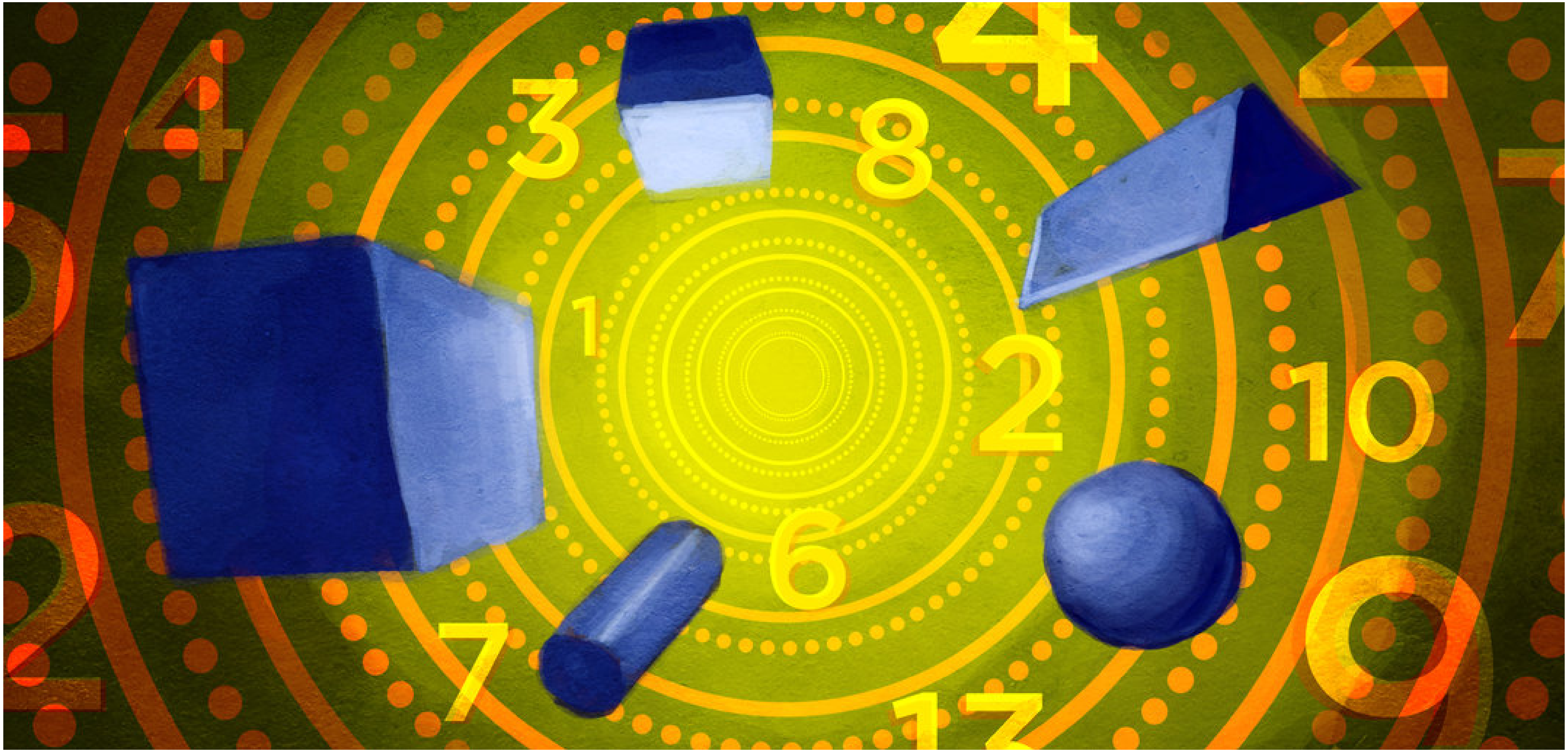
story weaver

पठन स्तर ४

चकित करे फ़िबोनाची!

Author: Shonali Chinniah
Illustrator: Hari Kumar Nair
Translator: Rishi Mathur



संख्याओं से हमारा हर रोज़ वास्ता पड़ता है। चीज़ों को गिनने के लिए, नापने के लिए, फ़ोन पर दोस्तों से बातें करने के लिए और यहां तक कि किसी भी चीज़ की क़ीमत का पता लगाने के लिए हमें जिनकी ज़रूरत पड़ती है, वह हैं - संख्याएं।

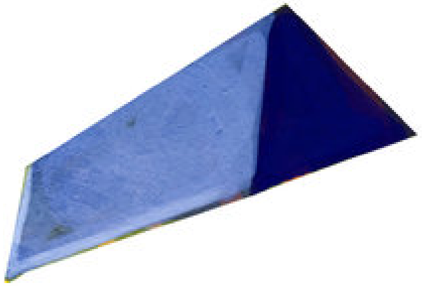
लेकिन क्या आप जानते हैं कि आप संख्याओं का इस्तेमाल करके ज्यामितीय आकृतियां और रंगोली के नमूने जैसे पैटर्न भी बना सकते हैं? क्या आपको मालूम था कि प्रकृति में जो पैटर्न हमें वास्तव में देखने को मिलते हैं, वह भी संख्याओं के पैटर्न पर आधारित होते हैं?

लेकिन हमें पहले यह जानना ज़रूरी है कि संख्याओं से बनने वाले पैटर्न कैसे होते हैं?

संख्याओं से बनने वाले पैटर्न संख्याओं के ऐसे क्रम होते हैं जिनमें हर संख्या का पिछली संख्या से एक ख़ास तरह का संबंध होता है।

उदाहरण के लिए हम एक बेहद सरल अंक क्रम को लेते हैं: 0, 1, 2, 3, 4... इस संख्या क्रम में हरेक संख्या का अपने पहले वाली संख्या से किस तरह का संबंध है? जवाब साफ़ है - इस संख्या क्रम में हरेक अगली संख्या अपने पहले वाली संख्या में 1 जोड़ने से बनी है।

एक और संख्या क्रम देखिए: 14, 12, 10, 8, 6... इस संख्या क्रम में हरेक अगली संख्या पिछली संख्या में 2 घटाने से बनी है।



आइए अब थोड़े से जटिल संख्या क्रम के ज़रिये इसी बात को समझने की कोशिश करते हैं 0, 1, 3, 6, 10, 15... अब इस संख्या क्रम की ख़ूबी क्या है?

इसमें इस्तेमाल की गयी संख्याओं से किस तरह का पैटर्न बनता है? आइये देखते हैं।

0 + **1** = 1

1 + **2** = 3

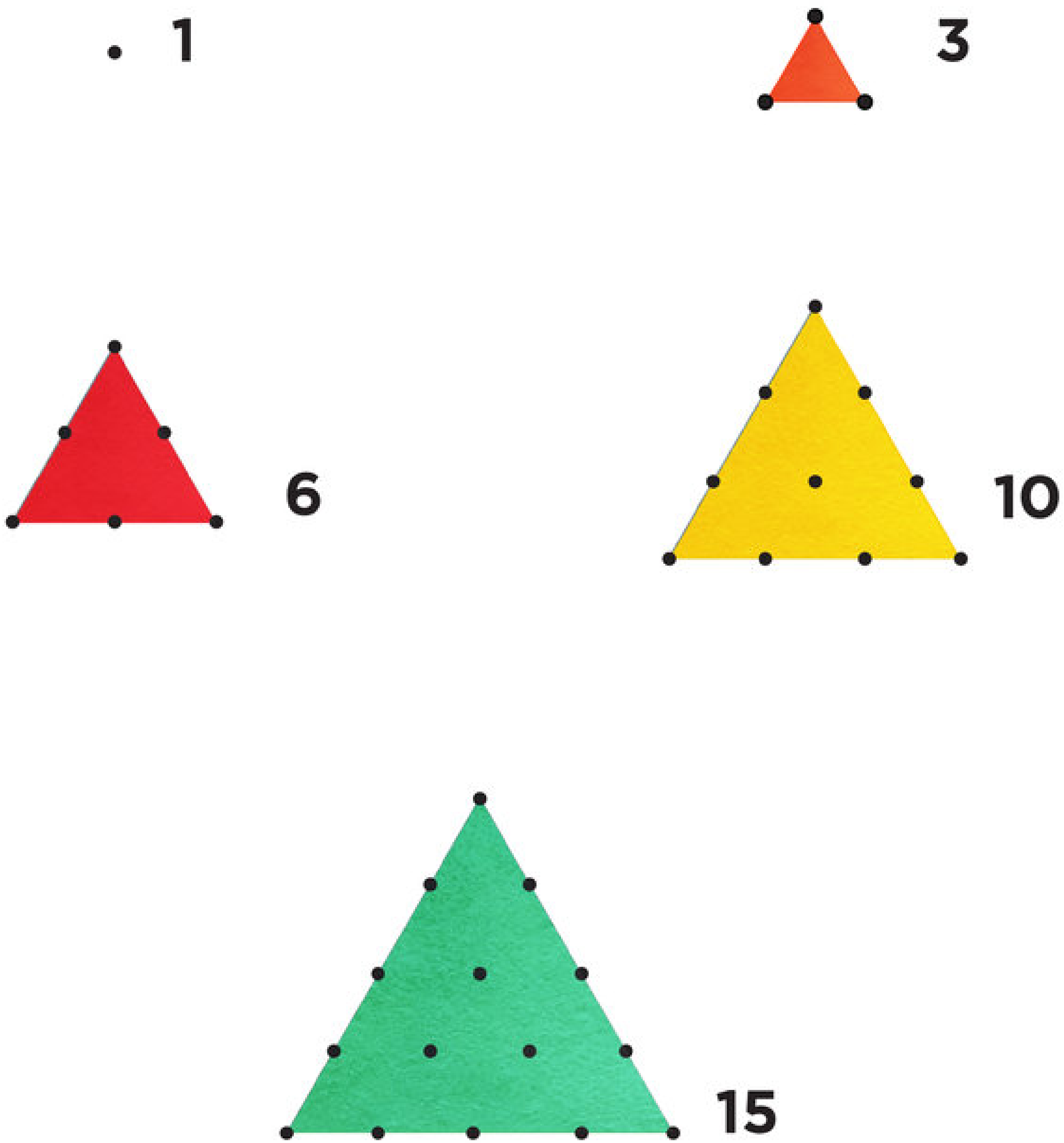
3 + **3** = 6

6 + **4** = 10

10 + **5** = 15

आपने देखा कि इन संख्याओं में भी एक क्रम है। इनसे एक ख़ास तरह का 'पैटर्न' बनता है। अब 15 के बाद इस क्रम में कौन सी संख्या होगी जो इस पैटर्न को विस्तार देगी, इसे आगे बढ़ाएगी?

जी हां, 21! क्योंकि 15 + **6** = 21



अब, संख्याओं के जिस 'पैटर्न’ यानी क्रम - 1, 3, 6, 10, 15, 21... को अभी - अभी हमने उदाहरण के रूप में समझा है, आगे देखते हैं कि उससे हम किस तरह का आकृति पैटर्न बना सकते हैं।

हां, हम बना सकते हैं! संख्याओं की जगह बिंदुओं को रखते हुए, उसी क्रम में बिंदुओं को बढ़ाते हुए, हम इस तरह त्रिकोणों का यह पैटर्न बना सकते हैं!

देखा आपने, कैसे संख्याओं से बन रहा एक क्रम, एक 'पैटर्न,’ एक 'आकृतियों का पैटर्न’ बन गया!

है न मज़ेदार? अब आपको संख्याओं के एक और सुंदर क्रम का उदाहरण देते है। यह भी एक फ़िबोनाची क्रम है, और हम इसे गर्व से संख्याओं का 'हेमचंद्र क्रम’ भी कह सकते हैं!
यह क्रम इस तरह है:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

क्या आपको इस क्रम में लगी संख्याओं का 'पैटर्न' समझ में आ रहा है?

वाह! आपने ठीक पहचाना... यह इसलिए फ़िबोनाची क्रम है क्योंकि इसमें तीसरी संख्या के बाद से हरेक संख्या अपने से पहले वाली दो संख्याओं का जोड़ है!

इस तरह:

0 + 1 = **1**

1 + 1 = **2**

2 + 1 = **3**

3 + 2 = **5**

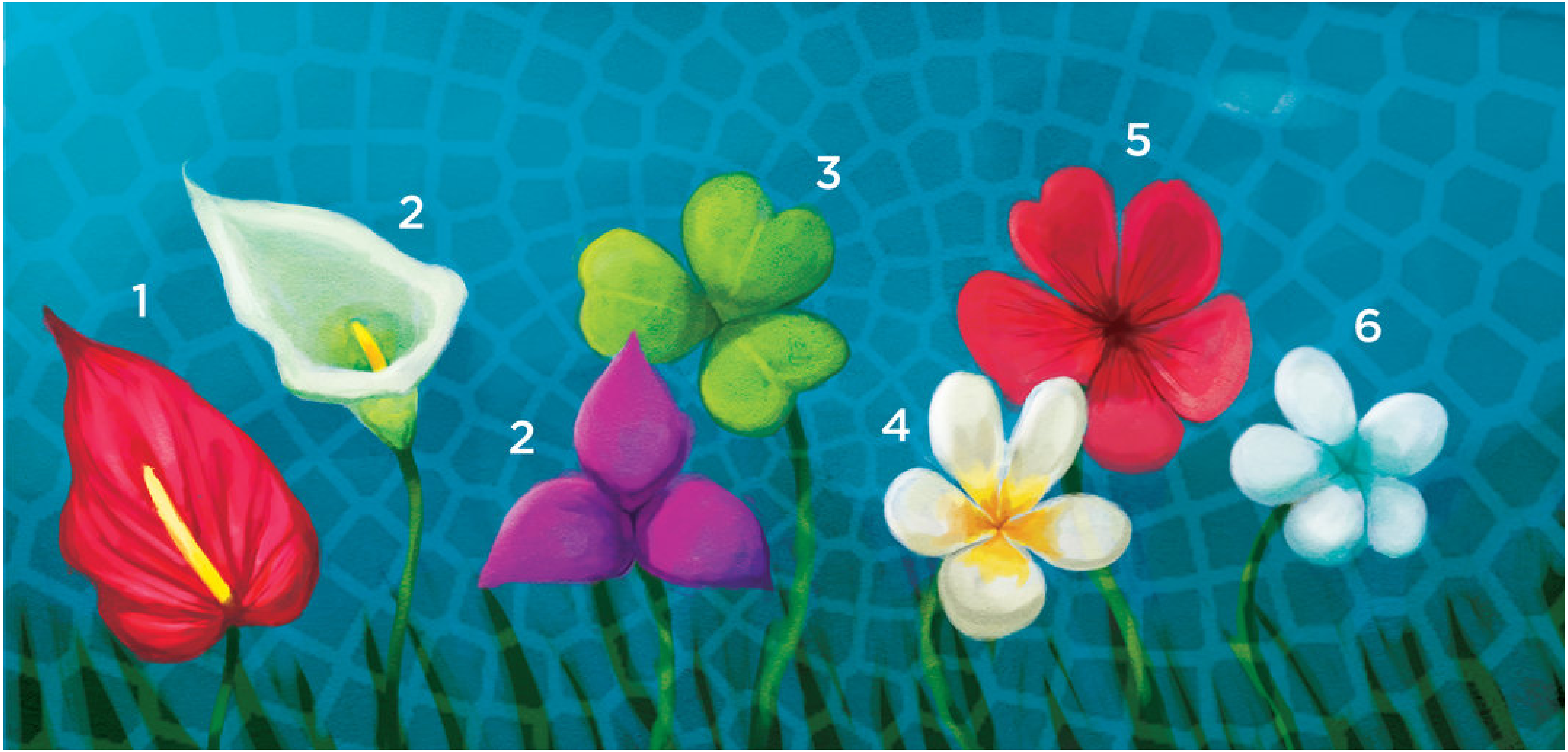
5 + 3 = **8**

8 + 5 = **13**

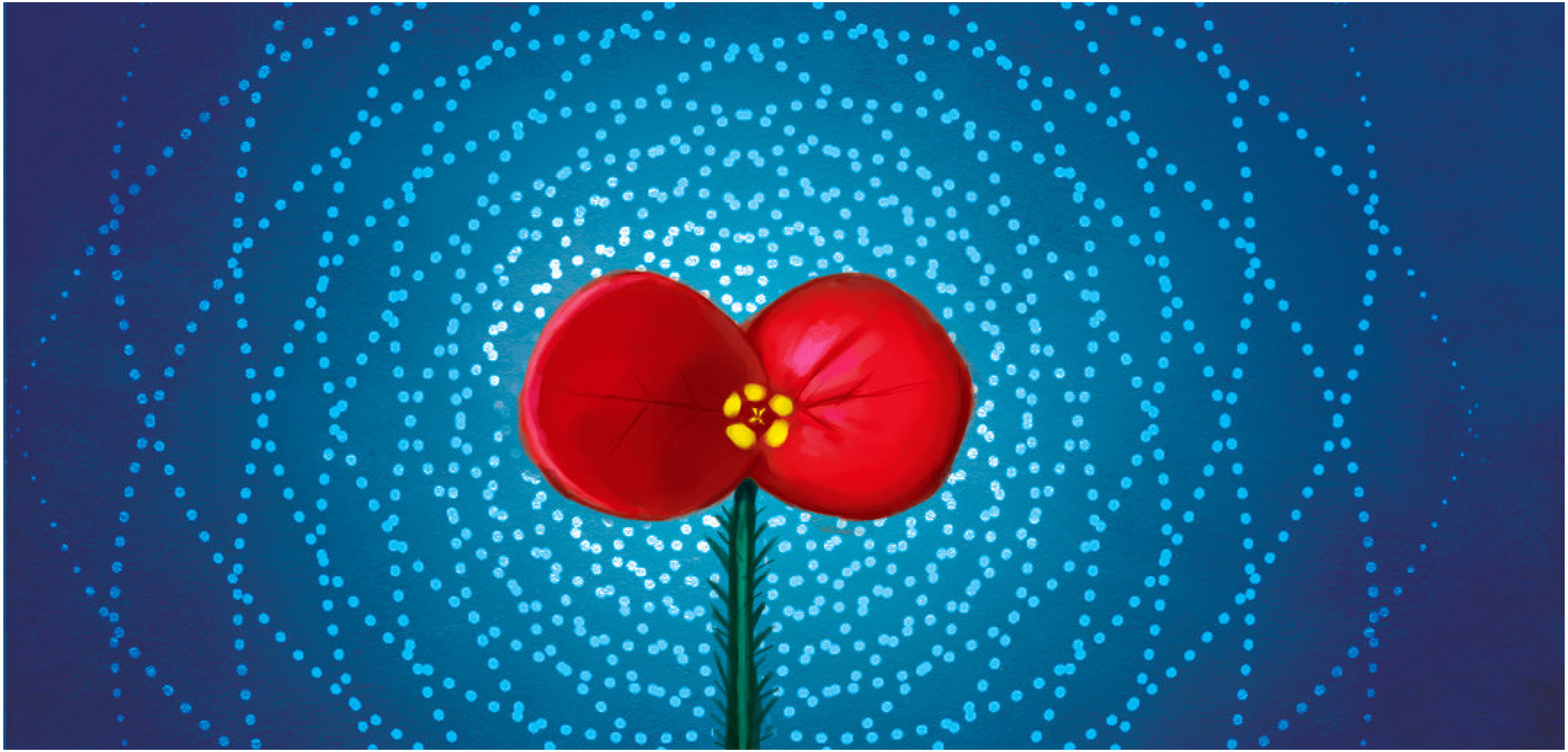
13 + 8 = **21**

21 + 13 = **34**

समझ गये न? शाबाश! अब सबसे मज़ेदार बात यह है कि फ़िबोनाची संख्याओं का क्रम हमें दर्जनों प्राकृतिक यानी कुदरती पैटर्न में भी देखने को मिलता है! कैसे? आइये देखते है।...



कई फूलों में पंखुड़ियों का क्रम फ़िबोनाची संख्याओं पर आधारित होता है!
ज़रा उन फूलों के बारे में सोचिए जिनमें 1, 3 या 5 पंखुड़ियां होती हैं। नाम याद आये? लीजिये, हम बता देते हैं-
1 पंखुड़ी वाले फूल होते हैं - 1. एंथूरियम, 2. कैला लिली।
3 पंखुड़ी वाले फूल होते हैं - 3. बोगनविलिया, 4. क्लोवर।
5 पंखुड़ी वाले फूल होते हैं - 5. कचनार, 6. गुड़हल, 7. चमेली।



दो पंखुड़ियों वाले फूल होते तो हैं, लेकिन बहुत कम होते है। 'क्राउन ऑफ़ थॉर्न्स’ के नाम से मशहूर इस सदाबहार कांटेदार पौधे के फूल एक अच्छा उदाहरण हैं।

लेकिन चार पंखुड़ियों वाले फूल बहुत ही कम होते हैं। ग़ौर करने वाली बात यह है कि 4 फ़िबोनाची संख्या नहीं है।
अब जब कोई फूल सामने पड़े तो उसकी पंखुड़ियां गिन कर ख़ुद ही देखना कि उनकी संख्या कितनी है, लेकिन फूलों को तोड़ना नहीं!

फ़िबोनाची संख्याओं के लिए डेज़ी के फूलों का उदाहरण सबसे दिलचस्प है। इस फूल की अलग - अलग किस्मों में अलग संख्या में पंखुड़ियां होती हैं, किसी में 13, किसी में 21 तो किसी में 34 - और यह सभी संख्याएं फ़िबोनाची संख्या हैं!

प्रकृति में इससे भी कुछ और उलझे से, लेकिन कहीं ज़्यादा दिलचस्प और हैरत में डाल देने वाले फ़िबोनाची संख्याओं पर आधारित क्रम या 'पैटर्न' देखने को मिलते हैं।

अगर हम थोड़ी गणित का सहारा लेने को तैयार हों तो ख़ुद ही इसे समझ सकते हैं।

चलिए, कोशिश करने में क्या हर्ज है... अगर हम फ़िबोनाची अनुक्रम की शुरूआती संख्याओं में से सभी के वर्ग* बनाएं, तो उसके नतीजे क्या होंगे?

जब हम किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा करते हैं, तो जो संख्या हमें मिलती है उसे उस मूल संख्या का वर्ग कहते हैं

फ़िबोनाची अनुक्रम की संख्याएं है: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, आदि।

अगर हम इन सभी संख्याओं के वर्ग बनाएं तो हमें यह संख्याएं मिलेंगी:

1^2 यानी 1 x 1 = 1

2^2 यानी 2 x 2 = 4

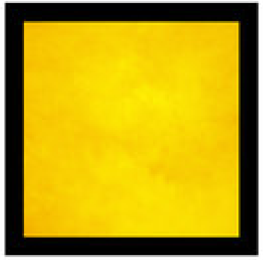
3^2 यानी 3 x 3 = 9

5^2 यानी 5 x 5 = 25

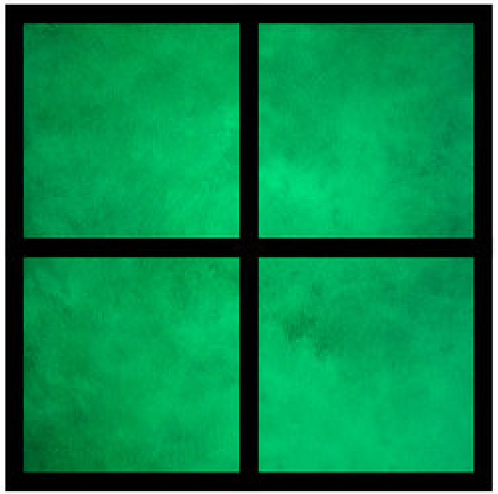
8^2 यानी 8 x 8 = 64

13^2 यानी 13 x 13 = 169

यानी फ़िबोनाची क्रम (उनके वर्ग): 1, 4, 9, 25, 64, 169, आदि होंगे।



1^2



2^2

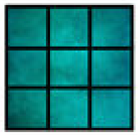
अब, जैसे हमने संख्याओं से बनने वाले एक 'संख्या पैटर्न' को त्रिकोणों से बने एक 'आकृति पैटर्न' में बदला, ठीक वैसे ही फ़िबोनाची क्रम के वर्गों को भी एक आकृति पैटर्न का रूप देने की कोशिश करते हैं। इसी तरह अब

1^2, 2^2, 3^2, और इस क्रम की अगली संख्याओं को भी आकृति पैटर्न में बदल सकते हैं।

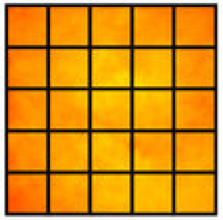
1^2 की संख्या को वर्ग के रूप में बदलना बहुत आसान है - सिर्फ़ एक वर्ग यानी चैकोर आकृति बनानी है।

2^2 को आकृति पैटर्न के रूप में इस तरह दर्शाएंगे - बाएं से दाएं यानी क्षैतिज रूप में दो वर्ग और ऊपर से नीचे यानी ऊर्ध्व व्यवस्था में दो और वर्ग।

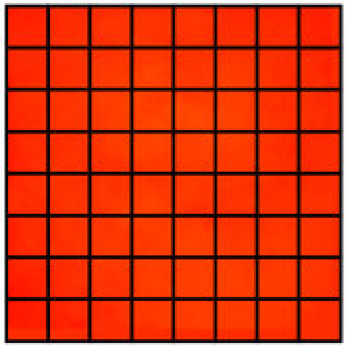
हमें पता है कि $2^2 = 4$, और इस आकृति में 4 वर्ग हैं। इस तरह की संरचना को 'ग्रिड' कहा जाता है।



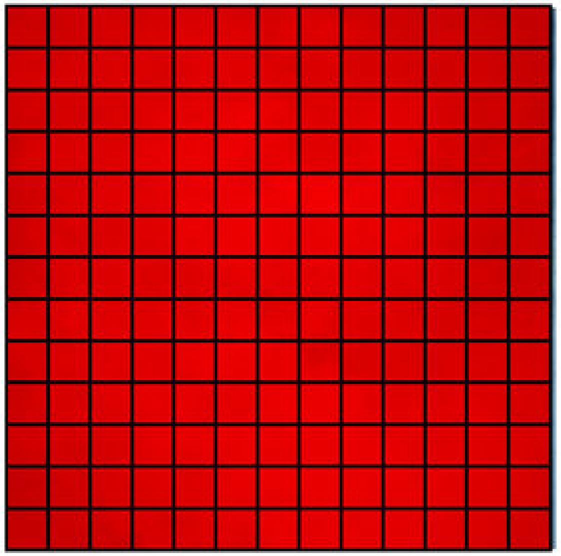
3^2



5^2



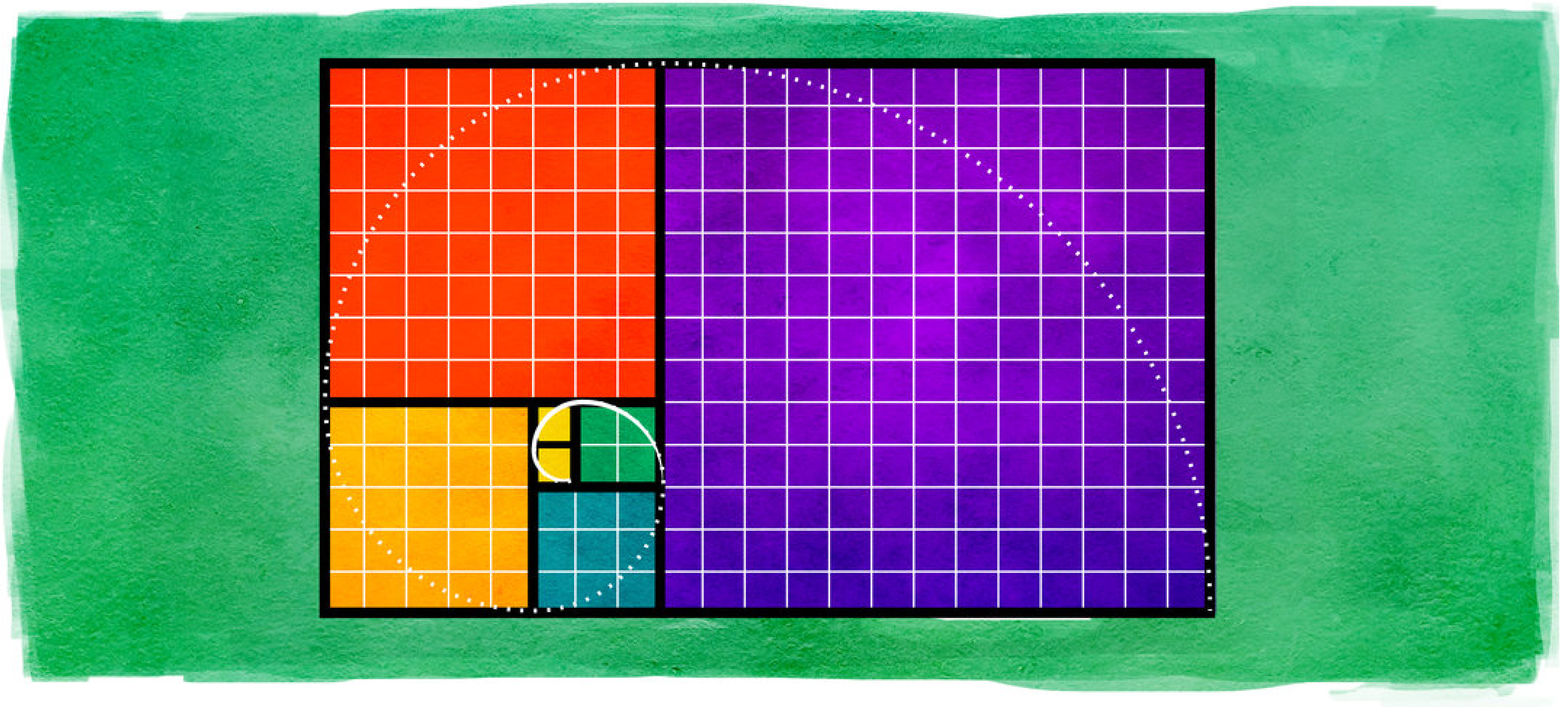
8^2



13^2

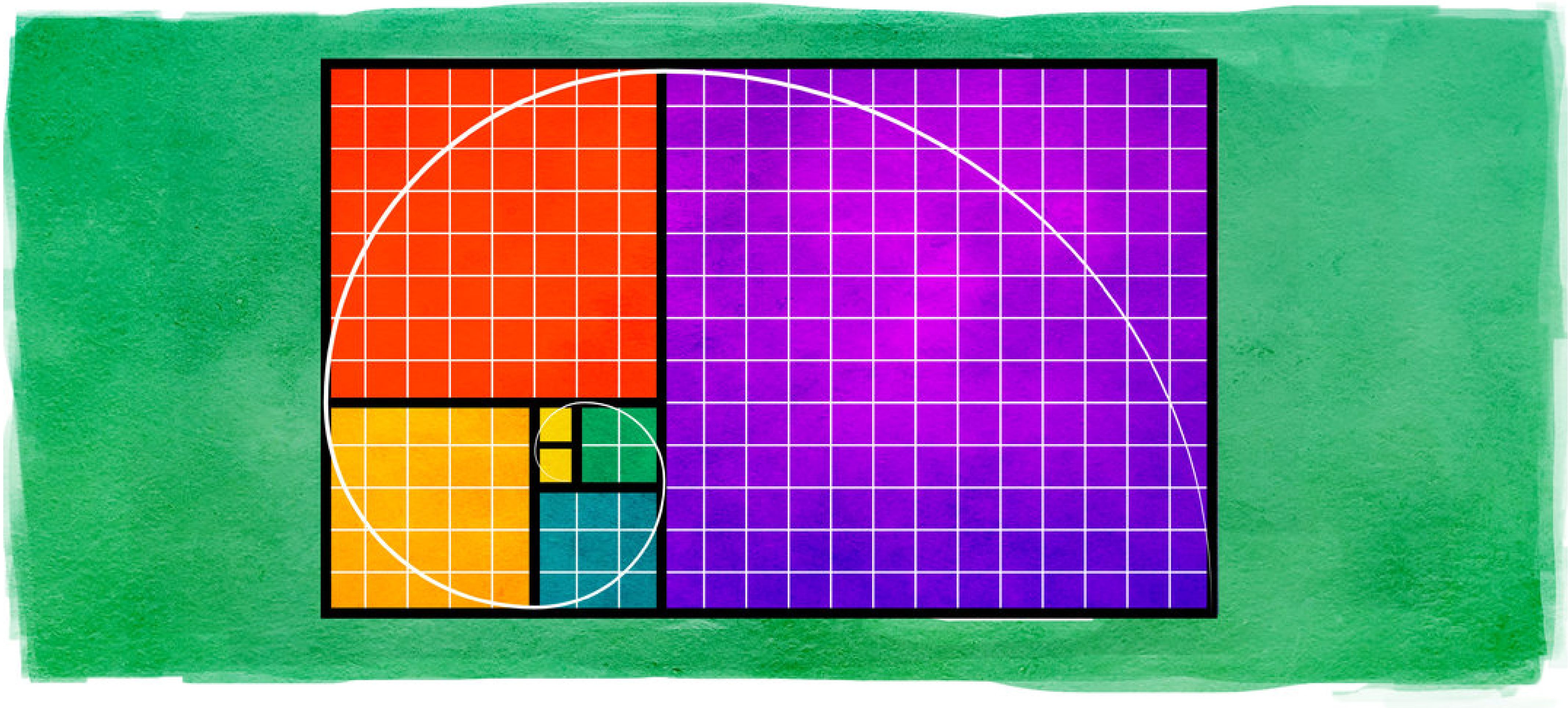
इसी तरह, 3^2 को ग्रिड रूप में दर्शाने के लिए तीन वर्ग बाएं से दाएं क्षैतिज व्यवस्था में और तीन वर्ग ऊपर से नीचे यानी ऊर्ध्व व्यवस्था में बनाये जाते हैं। इसके साथ ही हम जानते हैं कि $3^2 = 9$, और इसीलिए इस संख्या के लिए बनने वाले 'ग्रिड' में 9 वर्ग होते हैं।

5^2 को ग्रिड रूप में दिखाने के लिए पांच वर्ग पड़े (यानी अगल-बगल में पांच खड़े!) और पांच खड़े (यानी एक के ऊपर चार चढ़े!) इस तरह कुल 25 वर्गों का एक ग्रिड बनता है। इसी तरह 8^2 के ग्रिड में कुल 64 वर्ग होते हैं, और 13^2 के ग्रिड मे 169, और यह सिलसिला इसी हिसाब से बढ़ता जाता है। क्या आप ऐसे ग्रिड अपने आप बना सकते हैं? अगर बना सकते हैं, तो इसका मतलब आप 'वर्ग' को अच्छी तरह समझ गये हैं, और शाबाशी के हक़दार हैं!



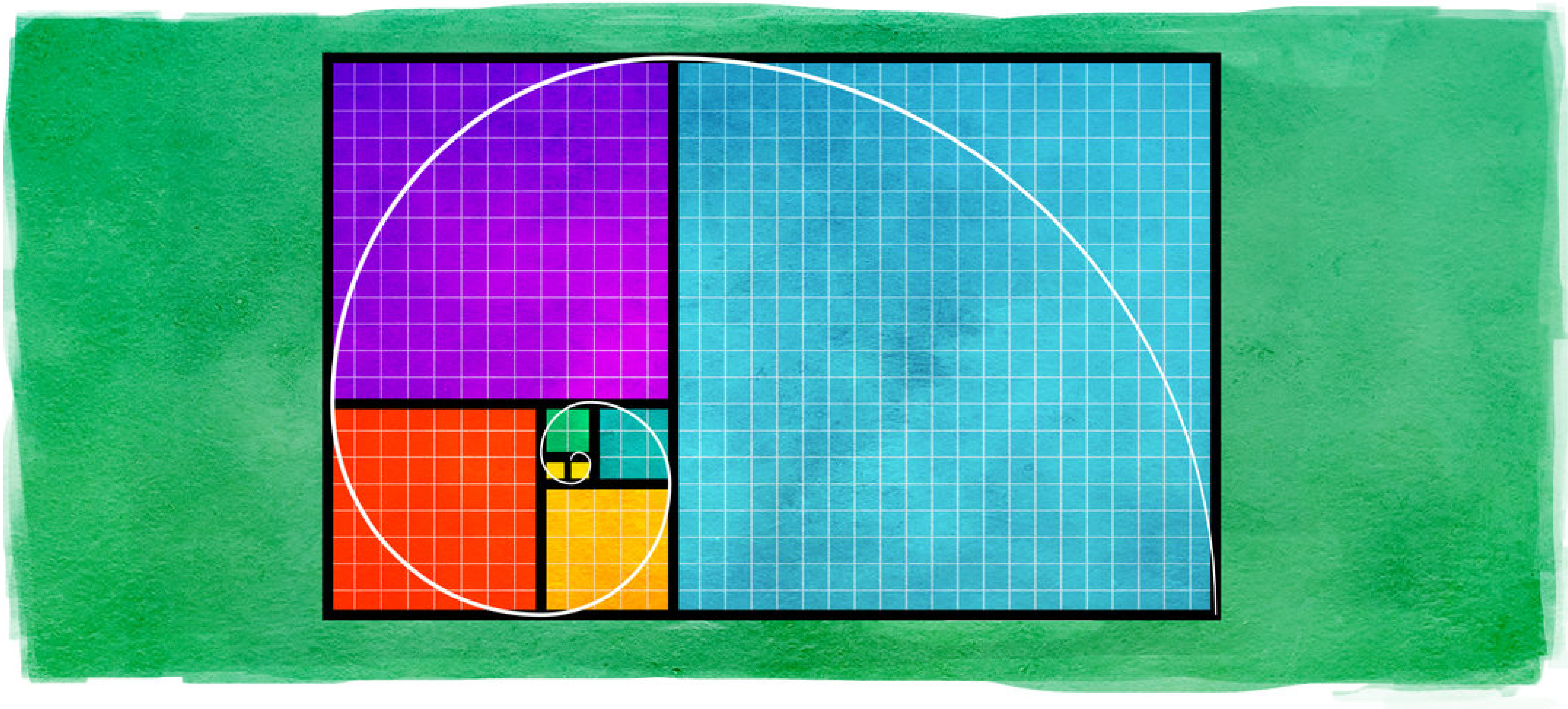
अब, जितने भी 'ग्रिड' अभी तक आपने बनाये हैं, उन्हें एक - दूसरे के साथ इस तरह सजाएं जैसे इस तस्वीर में दिखाया गया है।

फिर तस्वीर की तरह ही सबसे छोटे 'ग्रिड' के एक सिरे से एक वक्रीय यानी लहरदार रेखा खींचते हुए उसके दूसरे सिरे तक लेकर जाएं।



अब इस रेखा को आगे बढ़ाते हुए पहले 'ग्रिड' की तरह ही दूसरे और फिर तीसरे 'ग्रिड' तक बढ़ाते जाएं और 13 वर्गों वाले 'ग्रिड' तक ले जाएं। ऐसा करने पर वक्रीय रेखाओं की एक सुंदर बनावट, एक ख़ास तरह का 'पैटर्न' तैयार होता है जिसे 'फ़िबोनाची स्पाइरल' कहते हैं।

फ़िबोनाची संख्याओं के वर्गों से बनने वाले इस सुंदर घुमावदार बनावट और कुदरती तौर पर पाये जाने वाले ऐसे ही 'पैटर्न' के बीच कहीं कोई रिश्ता तो नहीं? लगता तो है, क्योंकि बिलकुल वैसे ही फ़िबोनाची स्पाइरल प्रकृति में भी देखने को मिलते हैं! कहां? आइये देखें। और, यह भी कि मिलते भी हैं या नहीं?

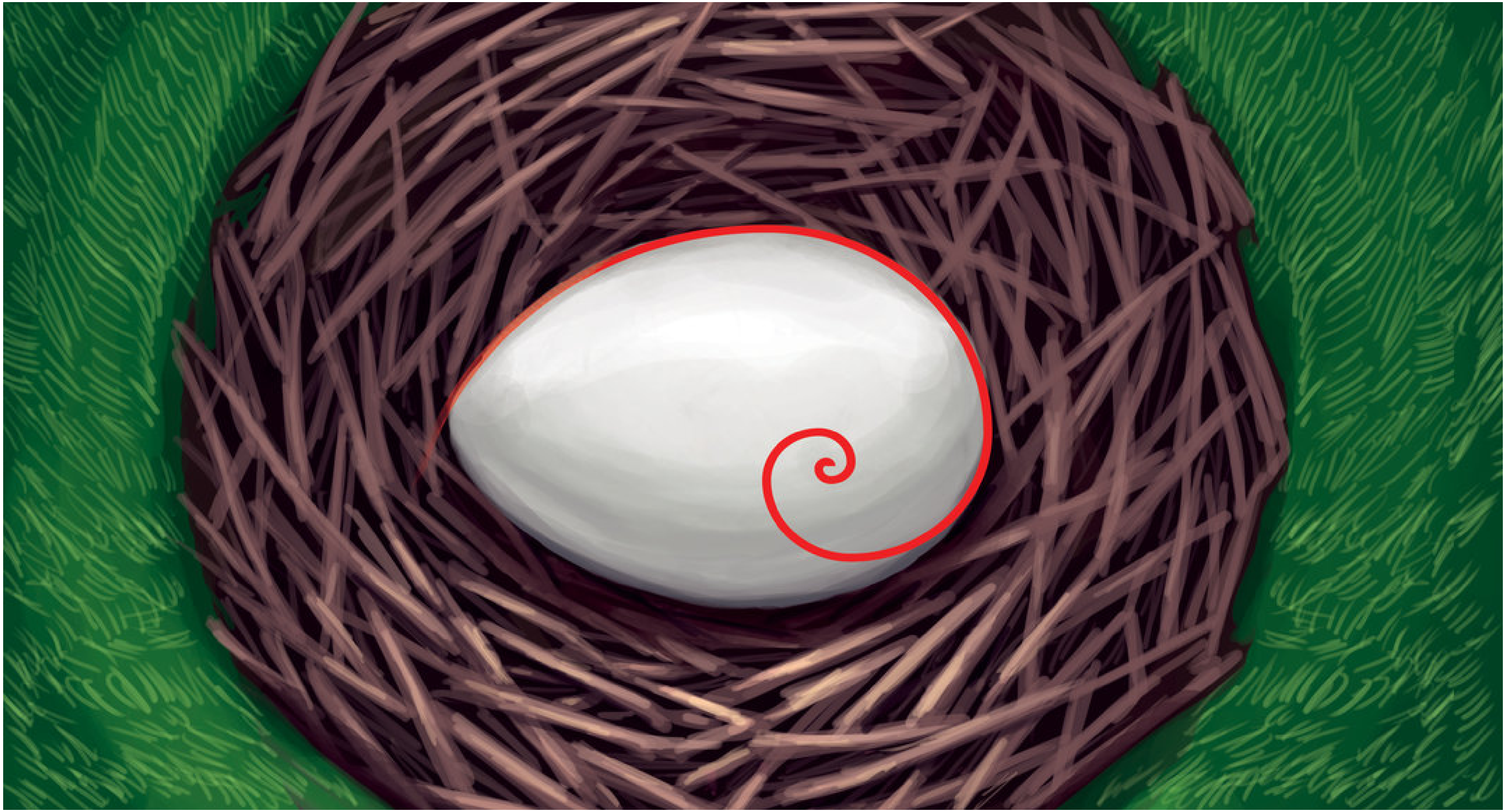


यहां एक फ़िबोनाची स्पाइरल है जिसमें एक और ग्रिड, 21^2 जोड़ी गयी है। देखिये कि स्पाइरल का सिलसिला कैसे आगे बढ़ता है?

क्या यह स्पाइरल कहीं देखा-देखा सा लगता है? हां, लगता है! क्योंकि ऐसे स्पाइरल फिबोनाची संख्याओं के वर्ग से बनते हैं, और खुद प्रकृति इनकी रचना करती है। आइये देखें की प्रकृति में हमें यह कहाँ मिलते हैं।
आप ऐसे फ़िबोनाची स्पाइरल समुद्र में पाये जाने वाली सीपियों और शंखों में भी देखने को मिलते हैं।

पिछले चित्र वाले फिबोनाची स्पाइरल जैसी बनावट हमें समुद्र मैं पाये जाने वाले सीपियों और शंखों में भी देखने को मिलती है। भले ही दोनों का मिलान करने के लिए आपको अपनी गर्दन फिबोनाची स्पाइरल की तरह ही क्यों न घुमानी पड़े।

... घोंघे के कवच...



..यहां तक कि अंडे भी (देखिये यह घुमाव पेज 16 पर दिये गये चित्र की तरह घड़ी के चलने की दिशा में न होकर, उसे उलटी दिशा में है)!

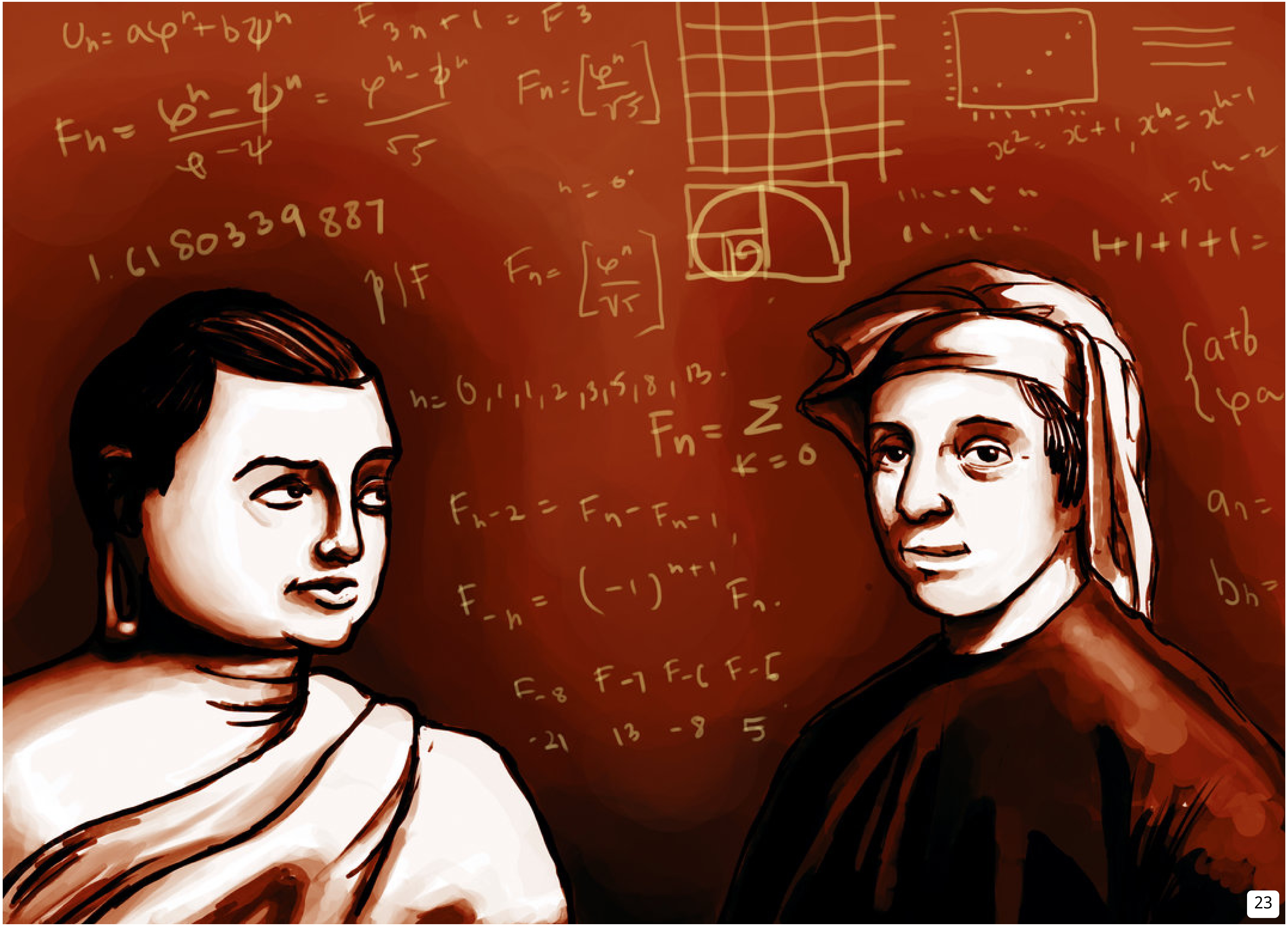
यहां तक कि गोल-गोल घूमते हुए उठने वाले तूफ़ान 'हरिकेन' यानी चक्रवात और कुछ 'गैलेक्सी' यानी निहारिकाओं को देखने से भी ऐसा लगता है कि उनकी बनावट भी कहीं न कहीं फ़िबोनाची संख्याओं के क्रम के अनुसार है। है न चकित करने वाली बात?
चक्रवात के चक्कर... निहारिकाओं के पेंच... सब फिबोनाची की फेर में!

आख़िर में... फ़िबोनाची संख्याओं की इस दिलचस्प कहानी के अंत में, आइये एक नज़र डालें फ़िबोनाची संख्या क्रम के इतिहास पर। ग्यारहवीं शताब्दी में, यानी अब से लगभग एक हज़ार साल पहले, आज जो इलाका गुजरात राज्य के रूप में जाना जाता है, उस इलाके में हेमचंद्र नाम के एक जैन विद्वान रहा करते थे।

कविता और संगीत का अध्ययन करते हुए उन्होंने संख्याओं के एक दिलचस्प क्रम की खोज कर डाली! जब वह यह जानने के लिए शोध कर रहे थे कि दीर्घ और लघु स्वरों को कितने प्रकार से अलग - अलग तरह की लय मे बांधा जा सकता है, तब उन्होंने पाया कि यह संभावना एक गणितीय संरचना पर आधारित होती है।

उनकी इस खोज के लगभग सौ साल बाद, सन् 1202 में, लियोनार्दो फ़िबोनाची (1170 से 1250 ईस्वी) नाम के इतालवी गणितज्ञ ने अपनी किताब 'लिबेर अबाशी' यानी 'गणनाओं की पुस्तक' में उसी संख्या क्रम के बारे में लिखा। फ़िबोनाची अकसर भूमध्यसागर के तटीय क्षेत्रों की यात्रा पर निकल जाया करते थे और रास्ते में वहां ठहरने वाले पूरब के व्यापारियों से मिलकर यह जानने की कोशिश करते रहते थे कि पूरब वाले गणनाएं कैसे करते हैं।

हो सकता है कि फ़िबोनाची को मूल रूप से हेमचंद्र के खोजे संख्या क्रम के बारे में इन्हीं व्यापारियों से पता चला हो, लेकिन पश्चिमी देशों में इस संख्या क्रम को फ़िबोनाची के ज़रिये जाना गया, इसलिए यह सारी दुनिया में फ़िबोनाची सीक्वेंस यानी फ़िबोनाची संख्या क्रम के नाम से जाना जाने लगा।


$U_n = a\varphi^n + b\psi^n$
$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$
1.6180339887
$x^2 = x + 1$, $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$
n = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13.
$F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$
$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$.
-21 13 -8 5

लेकिन, होशियार! ध्यान रहे... हालांकि प्रकृति में ऐसे बहुत सारे उदाहरण देखने को मिलते हैं जो फ़िबोनाची क्रम पर आधारित नज़र आते हैं, लेकिन ऐसे भी उदाहरण कम नहीं हैं जो इससे अलग होते हैं - जैसे, चार पंखुड़ियों वाले फूल या क्लोवर के पत्ते।

जो बात हैरत में डालती है और सोचने पर मजबूर करती है, वह यह है कि प्रकृति में जहां देखो वहां अकसर फ़िबोनाची क्रम वाली संख्याएं देखने को मिलती हैं। अब तक वैज्ञानिक इस बात का पता नहीं लगा पाये हैं कि आखिर प्रकृति को फ़िबोनाची क्रम वाली संख्याओं से इतना लगाव क्यों है।

हो सकता है कि बड़े होकर तुम इस अबूझ पहेली का हल ढूंढ लो!

Story Attribution:

This story: चकित करे फ़िबोनाची! is translated by Rishi Mathur . The © for this translation lies with Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Based on Original story: 'The Fascinating Fibonaccis', by Shonali Chinniah . © Pratham Books , 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license.

Other Credits:

This book was first published on StoryWeaver, Pratham Books.The development of this book has been supported by Oracle Giving Initiative. This book was created for StoryWeaver, Pratham Books, with the support of Roopa Pai (Guest Editor).

Illustration Attributions:

Cover page: Chamomile flower, by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 2: Shapes, patterns and numbers, by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 3: Numbers , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 4: Shapes , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 5: Triangles , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 6: Anthurium , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 7: Anthurium , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 8: Flowers , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 9: Crown of thorns , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license. Page 10: Daisies , by Hari Kumar Nair © Pratham Books, 2016. Some rights reserved. Released under CC BY 4.0 license.

The development of this book has been supported by Oracle Giving Initiative.

चकित करे फ़िबोनाची!

(Hindi)

लगभग एक हज़ार साल पहले हेमचंद्र नाम के एक भारतीय विद्वान ने पहली बार संख्याओं के एक अद्भुत क्रम को उजागर किया। पूरी एक सदी बीत जाने के बाद इटली के एक गणितज्ञ फ़िबोनाची का ध्यान हेमचंद्र के खोजे संख्या क्रम पर गया और उन्होंने इसकी व्याख्या की। अब इसे फ़िबोनाची क्रम के नाम से जाना जाने लगा। यह कोई जटिल संख्या क्रम नहीं है, बल्कि संख्याओं का बेहद सरल सा क्रम है, लेकिन वह खास बात जिसकी वजह से इसकी तरफ़ ध्यान खिंचा चला जाता है वह यह थी कि संख्याओं का यह ख़ास क्रम हमें प्रकृति में जगह-जगह पर अकसर देखने को मिलता है- फूलों में, सीपियों में, अंडों में, बीजों में और सितारों में भी! और इससे ज़्यादा जानने के लिए आपको यह किताब पढ़नी होगी!

यह पठन स्तर ४ की किताब है, उन बच्चों के लिए जो पढ़ने में प्रवीण हैं।